第 54 卷 第 3 期 2005 年 3 月
1000-3290/2005/54(03)/0996-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.3, March, 2005
©2005 Chin. Phys. Soc.

用推广的李群约化法求解非线性薛定谔方程*

阮航宇† 李慧军

(宁波大学物理系，宁波 315211)

(2004 年 4 月 29 日收到；2004 年 6 月 25 日收到修改稿)

用推广的经典李群约化法，得到了色散系数、非线性系数、补偿(或损失)系数为时、空变量函数时的非线性薛定谔方程的精确解. 深入研究了非线性薛定谔模型的一般孤波解与线性调频孤波解在光纤通讯与光纤放大器中的潜在应用.

关键词： 李群约化，非线性薛定谔方程，光纤通讯
PACC： 0230，0340

1. 引 言

在过去的 40 年里，由于光孤子在长距离传播中的潜在应用价值，人们对它进行了广泛的理论与实验研究. 在高强度激光发明后，以前一些光纤材料方面的光孤子理论(如 Kerr 效应等)被 Mollenauer 等人从实验上得到了证实. 并且他们还发现，当随光强作非线性变化的折射率与依赖频率的色散相互补偿时，脉冲在形状上不会改变，亦即在反常色散控制的体系中，平衡非线性效应与群速色散后的光孤子能在光纤中传播. 从这时起，人们就开始用非线性薛定谔方程从基础方面和潜在的应用方面对光纤中孤子的传播进行理论研究. 实际中光纤的特征参数不是常数，而是依赖位置的变量. 换言之，这些参数依赖于空间坐标. 例如，在实际光纤中传播的脉冲可用下面的非线性薛定谔方程描述：

$$\mathrm{i}\psi_z + \beta(z)\psi_{tt} + \gamma(z)\,|\,\psi\,|^2\psi + \mathrm{i}g(z)\psi = 0, \tag{1}$$

式中 β, γ 和 g 都是传播距离 z 的函数. 这个方程描述了单模光纤中脉冲非线性传播的增强(当 $g(z) < 0$)或减弱(当 $g(z) > 0$)，$\psi(z, t)$ 是电场的复包络面，t 是时间，$\beta(z)$是群速色散参数，$\gamma(z)$ 是非线性参数，$g(z)$是分布的补偿或耗散函数. 方程(1)的一些性质已在文献[1—14]中进行了研究. 在文献[15,16]中，分别用推广的对称群与自相似方法对方程(1)进行了研究. 文献[15]从研究

$$\mathrm{i}\psi_z + \psi_{tt} + W(z, t, |\,\psi\,|)\psi = 0 \tag{2}$$

的李群结构出发，得到了色散缓变光纤中非线性薛定谔方程的精确解. 在文献[15]的工作中，W 被看作与 ψ 具有同等地位的因变量.

本文用推广的经典李群约化法找到了方程(1)的一些特殊情况的解，其中的一些解描述了物理上有重要应用价值的光纤放大器中脉冲的放大或压缩. 本文得到的结果有两方面意义：一，用这个系统的方法可直接从一个变系数方程(常系数方程可作为一个特例)的解获得另一个变系数方程的解，并且将文献[15]的方法推广后，很容易得到同时含有三个变系数的非线性薛定谔方程的解，这样就能讨论一些与实际相符合的模型；二，更重要的是，这些模型和相应的解在设计光纤放大器、光脉冲压缩器和以孤波为基础的通讯链路中的潜在的应用价值.

2. 推广的经典李群约化法

通过变形，可将广义的非线性薛定谔方程(1)改写为

$$\mathrm{i}f(z, t, \psi, \psi^*)\psi_z + g(z, t, \psi, \psi^*)\psi_{tt} + W(z, t, |\,\psi\,|)\psi = 0, \tag{3}$$

式中 $f(z, t, \psi, \psi^*)$, $g(z, t, \psi, \psi^*)$, $W(z, t, |\psi|)$ 是与 ψ 有着同等地位的三个因变量. 很容易看出，三个变系数中至少有一个可以消去. 为了稍后的叙述方便，暂且先用这种形式来讨论. 下面就以方程(3)为例，来介绍推广的经典李群约化法. 它的一次

* 西南石油学院油气藏地质及开发工程国家重点实验室开放基金(批准号：PLN0402)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: Hyruan@mail.nbip.net

万方数据

延拓对称算符与变换群记作[17]

$$U = \xi(z,t,\psi,\psi^*)\partial_z + \tau(z,t,\psi,\psi^*)\partial_t + \eta(z,t,\psi,\psi^*)\partial_\psi + \eta^*(z,t,\psi,\psi^*)\partial_{\psi^*} + \rho(z,t,\psi,\psi^*,f)\partial_f + \sigma(z,t,\psi,\psi^*,g)\partial_g + \omega(z,t,\psi,\psi^*,f,g,W)\partial_W, \quad (4)$$

$$z_1 = z + \epsilon\xi(z,t,\psi,\psi^*),$$
$$t_1 = t + \epsilon\tau(z,t,\psi,\psi^*),$$
$$\psi_1 = \psi + \epsilon\eta(z,t,\psi,\psi^*),$$
$$\psi_1^* = \psi^* + \epsilon\eta^*(z,t,\psi,\psi^*),$$
$$f_1 = f + \epsilon\rho(z,t,\psi,\psi^*,f),$$
$$g_1 = g + \epsilon\sigma(z,t,\psi,\psi^*,g),$$
$$W_1 = W + \epsilon\omega(z,t,\psi,\psi^*,f,g,W),$$

式中 $\xi,\tau,\eta,\eta^*,\rho,\sigma$ 与 ω 分别是 z,t,ψ,ψ^*,f,g 与 W 的无穷小.利用方程(3)在算符(4)式及其延拓结构作用下的不变性,可得

$$\mathrm{i}\rho\psi_z + \mathrm{i}f[\eta_z] + \sigma\psi_{tt} + g[\eta_{tt}] + \omega\psi + W\eta = 0, \quad (5)$$

式中$[\eta_z]$,$[\eta_{tt}]$ 是 ψ_z和 ψ_{tt}在推广的对称变换下的无穷小形式,它们的形式如下:

$$[\eta_z] = (\eta - \xi\psi_z - \tau\psi_t)_z + \xi\psi_{zz} + \tau\psi_{zt},$$
$$[\eta_{tt}] = (\eta - \xi\psi_z - \tau\psi_t)_{tt} + \xi\psi_{ztt} + \tau\psi_{ttt}. \quad (6)$$

将(6)和(3)式代入(5)式,可得超定方程组:

$$\xi_\psi = \xi_{\psi^*} = \xi_t = 0, \quad \tau_\psi = \tau_{\psi^*} = 0,$$
$$\eta_{\psi^*} = 0, \quad \eta_{\psi\psi} = 0,$$
$$-\mathrm{i}f\tau_z + 2g\eta_{t\psi} - g\tau_{tt} = 0,$$
$$-\mathrm{i}f\xi_z - \mathrm{i}\sigma f/g + \mathrm{i}\rho + 2\mathrm{i}f\tau_t = 0,$$
$$\mathrm{i}f\eta_z - \sigma W\psi/g + g\eta_{tt} - \eta_\psi W\psi + 2\tau_t W\psi + \omega\psi + W\eta = 0, \quad (7)$$

式中 f,g 与 W 都是 (z,t,ψ,ψ^*)的函数,所以直接求解上述超定方程组较为困难.下面取几种与实际模型相符合的特殊情况进行讨论:

(1) $f=1,\rho=0$, 这时(7)式的解为

$$\xi = \xi(z), \quad \tau = \tau(t), \quad \eta = (\tau_t/2 + \lambda(z))\psi,$$
$$\sigma = -\xi_z g + 2\tau_t g, \quad \omega = -\mathrm{i}\lambda(z)_z - \xi_z W - g\tau_{ttt}/2, \quad (8)$$

式中 $\xi(z),\lambda(z)$是 z 的任意函数, $\tau(t)$ 是 t 的任意函数;

(2) $g=G(z),\sigma=\xi G(z)_z$, 这时(7)式的解为

$$\xi = \xi(z), \quad \tau = \tau(t), \quad \eta = (\tau_t/2 + \gamma(z))\psi,$$
$$\rho = -2f\tau_t + f\xi_z + G(z)_z f/G(z),$$
$$\omega = -\mathrm{i}\gamma(z)_z f + \xi W G(z)_z/G(z) - G(z)\tau_{ttt}/2 - 2\tau_t W, \quad (9)$$

式中 $\xi(z),\gamma(z),G(z)$ 是 z 的任意函数,$\tau(t)$ 是 t 的任意函数;

(3) $f=1,\rho=0,g=\exp(\alpha z),\sigma=\alpha\exp(\alpha z)\xi$ 条件下,可得解为

$$\xi = \xi(z), \quad \tau = (\alpha\xi/2 + \xi_z/2)t + \delta(z),$$
$$\eta = [\mathrm{i}\exp(-\alpha z)\delta(z)_z t/2 + \mathrm{i}\alpha\exp(-\alpha z)t^2\xi_z/8 + \mathrm{i}\exp(-\alpha z)t^2\xi_{zz}/8 + \kappa(z)]\psi,$$
$$\omega = -[\alpha\delta(z)_z t\exp(-\alpha z)/2 + \alpha^2 t^2\xi_z\exp(-\alpha z)/8 + \mathrm{i}\kappa(z)_z + \mathrm{i}\xi_{zz}/4 - \delta(z)_{zz}t\exp(-\alpha z)/2 - t^2\xi_{zzz}\exp(-\alpha z)/8 + \xi_z W + \mathrm{i}\alpha\xi_z/4], \quad (10)$$

式中 $\xi(z),\delta(z),\kappa(z)$ 是 z 的任意函数, $\tau(t)$ 是 t 的任意函数.

现在以情况(1)为例来介绍该方法.

若把 z_1,t_1与 ψ_1分别作为满足

$$\mathrm{i}\psi_{1_{z_1}} + g_1(z_1,t_1,\psi_1,\psi_1^*)\psi_{1_{t_1t_1}} + W_1(z_1,t_1,|\psi_1|)\psi_1 = 0 \quad (11)$$

的新自变量与新因变量.通过解下面的特征方程:

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\xi(z_1,t_1,\psi_1,\psi_1^*)} = \frac{\mathrm{d}t_1}{\tau(z_1,t_1,\psi_1,\psi_1^*)} = \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\eta(z_1,t_1,\psi_1,\psi_1^*)} = \frac{\mathrm{d}g_1}{\sigma(z_1,t_1,\psi_1,\psi_1^*,g_1)} = \frac{\mathrm{d}W_1}{\omega(z_1,t_1,\psi_1,\psi_1^*,g_1,W_1)} = \mathrm{d}\epsilon,$$

$$z_1|_{\epsilon=0} = z, \quad t_1|_{\epsilon=0} = t, \quad \psi_1|_{\epsilon=0} = \psi,$$
$$g_1|_{\epsilon=0} = g, \quad W_1|_{\epsilon=0} = W, \quad (12)$$

可得有限变换:

$$k_0(z_1) = \epsilon + k_0(z), \quad k_1(t_1) = \epsilon + k_1(t),$$
$$\psi_1 = \psi\sqrt{\tau(t_1)/\tau(t)}\exp[k_2(z_1,t_1) - k_2(z,t)],$$
$$g_1 = g\xi(z)/\xi(z_1)\exp[2k_3(z_1,t_1) - 2k_3(z,t)],$$
$$W_1 = W\xi(z)/\xi(z_1) + [k_4(z_1,t_1) - k_4(z,t)]/\xi(z_1), \quad (13)$$

式中

$$k_0(z_1) = \int\frac{\mathrm{d}z_1}{\xi(z_1)}, \quad k_1(t_1) = \int\frac{\mathrm{d}t_1}{\tau(t_1)},$$
$$k_2(z_1,t_1) = \int\frac{\lambda(z_1)}{\tau(t_1)}\mathrm{d}t_1,$$
$$k_3(z_1,t_1) = \int\frac{\tau(t_1)_{t_1}}{\xi(z_1)}\mathrm{d}z_1,$$
$$k_4(z_1,t_1) = -\mathrm{i}\lambda(z_1) - \int\{g\xi(z)/\xi(z_1)\exp[2k_3(z_1,t_1)$$

万方数据

$$-2k_3(z,t)]\tau(t_1)_{t_1t_1t_1}/2\}\mathrm{d}z_1 .$$

将方程(13)中的 g_1, W_1代入方程(11),可得

$$\mathrm{i}\psi_{1_{z_1}}+f(z,t,\psi,\psi^*)\xi(z)/\xi(z_1)\exp[2k_3(z_1,t_1)-2k_3(z,t)]\psi_{1_{t_1t_1}}+\{W(z,t,\psi,\psi^*)\xi(z)/\xi(z_1)+[k_4(z_1,t_1)-k_4(z,t)]/\xi(z_1)\}\psi_1=0, \quad (14)$$

式中变量 z,t,ψ 可用下式表示:

$$z=k_0^{-1}(k_0(z_1)-\epsilon),\quad t=k_1^{-1}(k_1(t_1)-\epsilon),$$

$$\psi=\psi_1\sqrt{\tau(k_1^{-1}(k_1(t_1)-\epsilon))/\tau(t_1)}\times\exp[k_2(k_0^{-1}(k_0(z_1)-\epsilon),k_1^{-1}(k_1(t_1)-\epsilon))-k_2(z_1,t_1)],$$

式中 k_0^{-1}, k_1^{-1}分别是 k_0和 k_1的反函数.

若 ψ 满足方程(3)($f=1$),则 ψ_1 满足方程(14),而方程(13)确定了 ψ_1与 ψ 之间的关系.若取 $W(z,t,|\psi|)=|\psi|^2$, 那么 ψ 满足色散控制的非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\psi_z+g(z,t,\psi,\psi^*)\psi_{tt}+|\psi|^2\psi=0. \quad (15)$$

由方程(14)可知,ψ_1 是具有补偿(或耗散)项的变系数非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\psi_{1_{z_1}}+f(z,t,\psi,\psi^*)\xi(z)/\xi(z_1)\exp[2k_3(z_1,t_1)-2k_3(z,t)]\psi_{1_{t_1t_1}}+|\psi|^2\psi_1\xi(z)/\xi(z_1)=[k_4(z,t)-k_4(z_1,t_1)]/\xi(z_1)\psi_1 \quad (16)$$

的解.

由于情况(2)和(3)的李群约化步骤与情况(1)的完全相同,这里不再详述.

只要选择了(8)—(10)式中的任意函数,就可以建立具体的非线性薛定谔模型,利用所建立模型(ψ_1 所满足的方程)与原模型(ψ 所满足的方程)解之间的关系,找到新建模型的解. 以下将给出一些具体模型的解与它们的应用.

3. 一些非线性薛定谔模型的精确解及其应用

从上面讨论中可知,原方程对建立新模型与求这些模型的解非常重要.这里分别选取常系数非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\psi_z+\psi_{tt}+|\psi|^2\psi=0 \quad (17)$$

与变系数非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\psi_z+\exp(\alpha z)\psi_{tt}+|\psi|^2\psi=0 \quad (18)$$

为原方程,式中

$$\psi=\sqrt{2}m\,\mathrm{sech}(2mnz-mt)\exp\{\mathrm{i}[(m^2-n^2)z+nt]\}$$

与

$$\psi=\sqrt{2}m\exp(-\alpha z/2)\mathrm{sech}\{2mn[1-\exp(-\alpha z)]/\alpha-mt\exp(-\alpha z)\}\exp\{\mathrm{i}[(m^2-n^2)(1-\exp(-\alpha z))/\alpha+(nt+\alpha t^2/4)\exp(-\alpha z)]\} \quad (19)$$

分别满足方程(17)与(18),即它们是所对应方程的一种解.若在(19)式中取 $n=0$, 它就成为线性调频孤波解,这样,就有可能找到以(18)为原方程所建立的非线性薛定谔模型的线性调频孤波解.以下将讨论(8)—(10)式所对应的非线性薛定谔模型及其孤波解,并给出这些模型与解的应用.

3.1.(8)—(10)式所对应的非线性薛定谔模型及其解

这里将考虑在 $W(z,t,|\psi|)=|\psi|^2$条件下的一些例子.

(8)式中取 $\xi(z_1)=az_1^2$, $\tau(t_1)=bt_1$, $\lambda(z_1)=\lambda z_1$, 可得非线性薛定谔模型为

$$\mathrm{i}\psi_{1_{z_1}}+g(z,t,\psi,\psi^*)\exp(2b\epsilon)(1+\epsilon az_1)^{-2}\psi_{1_{t_1t_1}}+\exp(-b\epsilon)(1+\epsilon az_1)^{-2(1+\lambda/a)}|\psi_1|^2\psi_1=\mathrm{i}\epsilon\lambda(1+\epsilon az_1)^{-1}\psi_1, \quad (20)$$

式中若取 $g(z,t,\psi,\psi^*)=1$, 则可得以常系数模型为原方程建立的模型,取 $g(z,t,\psi,\psi^*)=\exp(\alpha z)$, 则可得以指数色散缓变的非线性薛定谔方程为原方程所建立的模型. 下面分别对两种情况进行讨论.

当 $g(z,t,\psi,\psi^*)=1$, 得到模型

$$\mathrm{i}\psi_{1_{z_1}}+\exp(2b\epsilon)(1+\epsilon az_1)^{-2}\psi_{1_{t_1t_1}}+\exp(-b\epsilon)(1+\epsilon az_1)^{-2(1+\lambda/a)}|\psi_1|^2\psi_1=\mathrm{i}\epsilon\lambda(1+\epsilon az_1)^{-1}\psi_1,$$

经过变换:

$$z_1=(\exp(\epsilon ax_1)-1)/(\epsilon a),\quad t_1=\exp(b\epsilon)\tau_1,$$
$$\psi_1=u_1\exp(b\epsilon/2),\quad \epsilon=-\theta,$$

模型变为

$$\mathrm{i}u_{1_{x_1}}+\exp(a\theta x_1)u_{1_{\tau_1\tau_1}}+\exp[(a+2\lambda)\theta x_1]\times|u_1|^2u_1=-\mathrm{i}\lambda\theta u_1, \quad (21)$$

方程(21)的解为

$$u_1=\sqrt{2}m\exp(-\lambda\theta x_1)\mathrm{sech}(2mnA-m\tau_1)\times\exp\{\mathrm{i}[(m^2-n^2)A+n\tau_1]\}, \quad (22)$$

式中 $A=(\exp(a\theta x_1)-1)/(a\theta)$.

若取 $g(z,t,\psi,\psi^*)=\exp(\alpha z)$,且将所得方程经过上面类似变换,可得方程

万方数据

$$iu_{1_{x_1}}+\exp\{-\alpha[1-\exp(a\theta x_1)]/(a\theta)\}$$
$$\times\exp(a\theta x_1)u_{1_{\tau_1\tau_1}}+\exp[(a+2\lambda)\theta x_1]\,|u_1|^2u_1$$
$$=-i\lambda\theta u_1 \tag{23}$$

及解

$$u_1=\sqrt{2A}m\exp(-\lambda\theta x_1)\mathrm{sech}[2mn/\alpha$$
$$-m(2n/\alpha+\tau_1)A]\exp\{i[(m^2-n^2)/\alpha$$
$$+(\alpha\tau_1^2/4+n\tau_1-(m^2-n^2)/\alpha)A]\}, \tag{24}$$

式中 $A=\exp\{\alpha[1-\exp(a\theta x_1)]/(a\theta)\}$.

在(9)式中取 $\xi(z_1)=z_1^2,\tau(t_1)=t_1,C(z_1)=z_1^2,G(z_1)=1$,其原方程只能是(17)式($f(z,t,\psi,\psi^*)=1$). 经过变换：$z_1=\frac{\exp(\epsilon x_1)-1}{\epsilon}$, $t_1=\exp(\epsilon)\tau_1,\psi_1=\exp(\epsilon/2)u_1$,可得

$$iu_{1_{x_1}}+\exp(-\epsilon x_1)u_{1_{\tau_1\tau_1}}+\exp[-\epsilon x_1$$
$$-8\sinh^2(\epsilon x_1/2)/\epsilon]\,|u_1|^2u_1=2i\sinh(\epsilon x_1)u_1 \tag{25}$$

及解

$$u_1=\sqrt{2}m\exp[-2/\epsilon+2\cosh(\epsilon x_1)/\epsilon]$$
$$\times\mathrm{sech}(2mnA-m\tau_1)$$
$$\times\exp\{i[(m^2-n^2)A+n\tau_1]\}, \tag{26}$$

式中 $A=(1-\exp(-\epsilon x_1))/\epsilon$.

在(9)式中取 $\xi(z_1)=\lambda z_1,\tau(t_1)=bt_1,\omega(z_1)=cz_1,G(z_1)=\exp(\alpha z_1)$,其原方程只能是(18)式($f(z,t,\psi,\psi^*)=1$). 经过变换：$t_1=\exp[(2b-\omega)\epsilon/2]\tau_1$, $\psi_1=u_1\exp[(b+\omega)\epsilon/2]$和 $\exp(-\lambda\epsilon)=\theta$, 可得

$$iu_{1_{z_1}}+\exp(\alpha\theta z_1)u_{1_{\tau_1\tau_1}}$$
$$+|u_1|^2u_1\exp[2c(\theta-1)z_1/\lambda]$$
$$=ic(1-\theta)u_1/\lambda \tag{27}$$

及解

$$u_1=\sqrt{2\theta}m\exp[cz_1(1-\theta)/\lambda-\alpha\theta z_1/2]\mathrm{sech}[2mn/\alpha$$
$$-m(2n/\alpha+\sqrt{\theta}\tau_1)\exp(-\alpha\theta z_1)]$$
$$\times\exp\{i[(m^2-n^2)/\alpha+(\alpha\theta\tau_1^2/4+n\sqrt{\theta}\tau_1$$
$$-(m^2-n^2)/\alpha)\exp(-\alpha\theta z_1)]\}. \tag{28}$$

在(9)式中取 $\xi(z_1)=z_1,\tau(t_1)=t_1,\omega(z_1)=z_1^2,G(z_1)=\exp(\alpha z_1)$, 经过变换：$t_1=\exp(\epsilon/2)\tau_1,\psi_1=\exp(\epsilon)u_1$,可得

$$iu_{1_{z_1}}+\exp[\alpha z_1\exp(-\epsilon)]u_{1_{\tau_1\tau_1}}$$
$$+\exp[z_1^2(\exp(-2\epsilon)-1)]\,|u_1|^2u_1$$
$$=iz_1(1-\exp(-2\epsilon))u_1 \tag{29}$$

及解

$$u_1=\sqrt{2A}m\exp\{[z_1^2(1-\exp(-2\epsilon))-\epsilon]/2\}\mathrm{sech}\{2mn/\alpha$$
$$-m(2n/\alpha+\tau_1\exp(-\epsilon/2))A\}\exp\{i[(m^2-n^2)/\alpha$$
$$+(\alpha\tau_1^2\exp(-\epsilon)/4+n\tau_1\exp(-\epsilon/2)$$
$$-(m^2-n^2)/\alpha)A]\}, \tag{30}$$

式中 $A=\exp[-\alpha z_1\exp(-\epsilon)]$.

在(10)式中取 $\xi(z_1)=\exp(\alpha z_1),\delta(z_1)=0,\kappa(z_1)=0$, 其原方程只能是(18)式,这时可得

$$i\psi_{1_{z_1}}+\exp(\alpha z_1)\psi_{1_{t_1t_1}}+|\psi_1|^2\psi_1/(1+\epsilon\alpha\exp(\alpha z_1))$$
$$=i\epsilon\alpha^2\exp(\alpha z_1)\psi_1/[2(1+\epsilon\alpha\exp(\alpha z_1))], \tag{31}$$

及解

$$\psi_1=\sqrt{2}m\sqrt{1+\epsilon\alpha\exp(\alpha z_1)}\exp(-\alpha z_1/2)\mathrm{sech}\{-2mn$$
$$\times[1-(1+\epsilon\alpha\exp(\alpha z_1))\exp(-\alpha z_1)]/\alpha+mt_1$$
$$\times\exp(-\alpha z_1)\}\exp\{i[(m^2-n^2)(1-(1+\epsilon\alpha\exp(\alpha z_1))$$
$$\times\exp(-\alpha z_1))/\alpha+nt_1\exp(-\alpha z_1)+\alpha t_1^2$$
$$\times(\exp(-\alpha z_1)+\alpha\epsilon)/[4(1+\epsilon\alpha\exp(\alpha z_1))]]\}. \tag{32}$$

3.2. 方程及其解的应用

在上面获得的非线性薛定谔模型中,我们给出了(21),(25)式的一般孤波解. 其中(21)式的补偿项是常数, (25)式的是距离的函数. 在方程(21)中,通过调节 a,b,θ,λ 和 α, 可能得到有应用价值的非线性项与色散项的系数.在方程(25)中,补偿项是距离变量的双曲正弦函数,若选择较小的参数 ϵ, 补偿项将随距离作拟线性变化.线性变化是建立模型时一种最简单的近似,所以这个模型可能有一定的价值.

在方程(23),(27),(29),(31)4 个模型的解中,若取 $n=0$, 就得到它们的线性调频孤波解. 这些模型中的补偿项有些是距离的函数,有些是常数.现在以方程(27)为例,来说明这些模型及其解的潜在应用价值.在方程(27)中,耗散项是常数,非线性项与色散项的系数都是距离的指数函数.若在(28)式中取 $n=0$,就得到(27)式的线性调频孤波解,它的峰值振幅 $A(z_1)$与脉冲宽度 $W(z_1)$ 分别为

$$A(z_1)=\sqrt{2}m\exp[cz_1(1-\theta)/\lambda-\alpha\theta z_1/2-\lambda\epsilon/2];$$
$$W(z_1)=\exp(\alpha\theta z_1)/(m\sqrt{\theta}). \tag{33}$$

现在考虑一些特殊情况,从(33)式可清楚地看出,当 $\alpha<0$, z_1趋于无穷时,脉冲宽度趋于零(如图 1).这说明 $\alpha<0$ 提供了一个很好的脉冲压缩方案.并且

万方数据

由(33)式,还可得到峰值振幅的三种情况(这里取 $m>0$):(1) 当 $c(1-\theta)/\lambda-\alpha\theta/2<0$, $A(z_1)$是递减函数; (2) 当 $c(1-\theta)/\lambda-\alpha\theta/2>0$, $A(z_1)$ 是递增函数;(3) 当 $c(1-\theta)/\lambda-\alpha\theta/2=0$, $A(z_1)$ 等于常数.解(28)式(在 $n=0$ 时)的重要性在于,当 $z_1\to\infty$ 时,这个脉冲能被压缩到任何宽度,且可通过调节 α 与 θ 来控制压缩的速度(如图 1),并且脉冲的形状和线性调频性将保持不变.

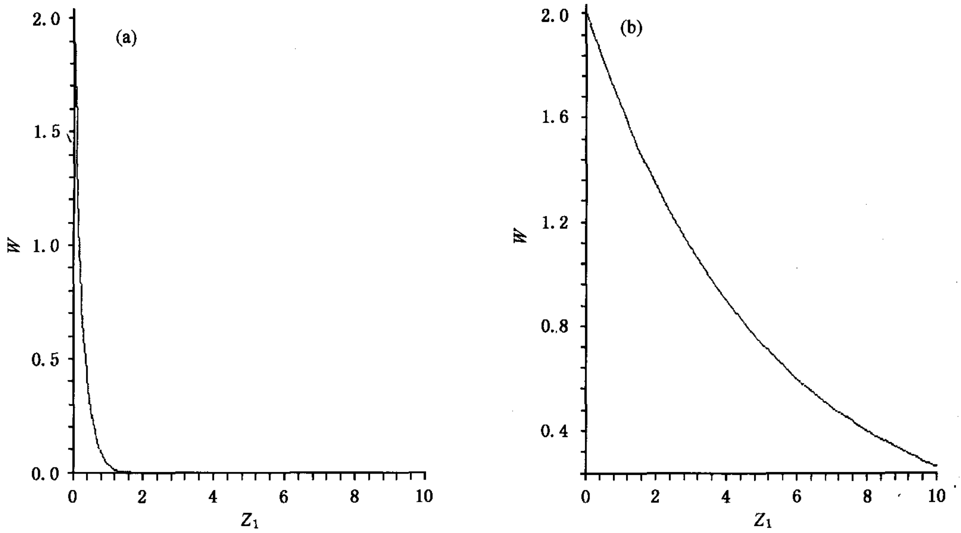

图 1 脉冲宽度 W[(33)式]随空间坐标变化的曲线图 (a)为 $m=0.5,\alpha=-4,\lambda=0.1,\epsilon=0.01$;(b)为 $m=0.5,\alpha=-0.2,\lambda=0.1,\epsilon=0.01$

(28)式所给的解在 $c(\theta-1)/\lambda<0$ 时,也能应用到光纤放大器的脉冲压缩问题中, 这种情况下,当 $\alpha<0$ 时脉冲的能量递增(如图 2(a))(可通过它的模 $U=|u_1|^2$ 来判断能量的变化),但脉冲的宽度却趋于零.

从方程(27)可知,可在光纤放大器中用衰减的非线性与群速色散参数将双曲正割脉冲压缩到任何所需的宽度.与以前的具有常系数的反常色散控制体系中的脉冲放大器相比,这种机理的压缩效果更好,因为在反常色散控制体系中,由于色散与相位自调节的结合效应,脉冲被分裂成一系列的脉冲.在模型(23),(29),(31)式中,由于具有分布的补偿项,为设计新的脉冲压缩器提供了可能性.由于在 3.1 节中所得的线性调频孤波解是色散-耗散(或补偿)控制体系中的精确解,它们在传播中不会产生辐射噪音,也不会有孤子的辐射,所以这些孤波解能被应用到长距离传输的线性调频孤子链中,因此它们将可能成为新一代的信息载体.并且由图 2(b)可知,在条件 $m=0.5,n=0,c=-1,\alpha=-0.2,\lambda=0.1,\epsilon=0.01$ 下,方程(27)是一个描述耗散光纤介质的方程,但所对应的模却随距离的增加而增加,其脉冲的能量也将随着增加,这样正好补偿耗散介质所引起的能量损耗,从而保证了孤子在光纤中的稳定传播.

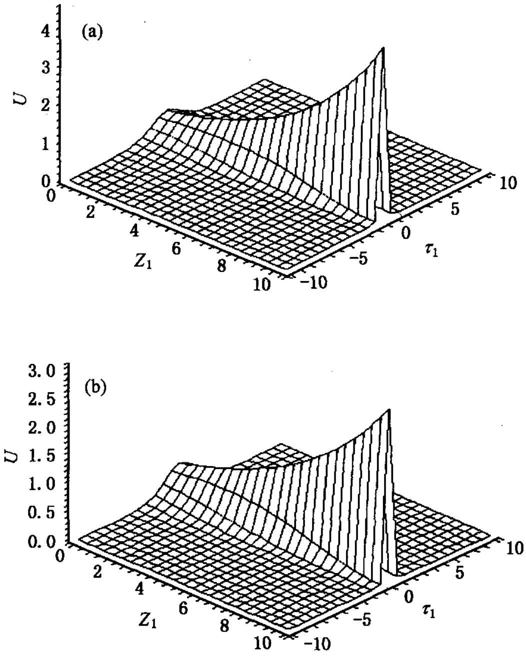

图 2 方程(28)的模 $U=|u_1|^2$ 随时间空间变化的曲面图 $m=0.5,n=0,\alpha=-0.2,\lambda=0.1,\epsilon=0.01,c=1$(a),$c=-1$(b)

万方数据

4. 结论与总结

本文用推广的李群约化法详细研究了具有分布系数的非线性薛定谔方程的精确解.与文献[15]相比,本文所得方程更加一般化,并且在方程中可包含各种系数.给出了一种求线性调频孤波解的方案,并且将一些解应用到光纤放大器的脉冲压缩问题中,得到了很好的效果. 用此法不仅可以将原方程的解直接引入所得模型中,并且所得模型中的补偿项不会像文献[16] 中那样,完全受非线性项与色散项系数的限制,而且此法用起来较方便,所以值得进一步推广. 对每个所得的模型只给出一种解,若能找到原方程的别的解,就可以得到所得模型的其他形式的解,如文献[15]中给出的 N 孤子解.

本文通过用推广的李群约化法给出变系数的非线性薛定谔方程的一般孤波解与线性调频孤波解,并给出这些解在光纤通讯、光纤放大器中应用的理论依据,希望这种结果能被更多的理论和实验工作者用于解释自然科学中的实际非线性现象.

[1] Hasegawa A and Tappert F D 1973 *Appl. Phys. Lett.* **23** 142

[2] Joshi N 1987 *Phys. Lett.* A **125** 456

[3] Clarkson P A 1988 *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* sect. A: Math. **109** 109

[4] Gao Y T and Tian B 2000 *Comput. Math. Appl.* **40** 1107

[5] Garnier J and Abdullaev F K 2000 *Physica D* **145** 65

[6] Grimshaw R 1979 *Proc. Roy. Soc. London* A **368** 377

[7] Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese)[刘适达等 2002 物理学报 **51** 718]

[8] Ruan H Y *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 586 (in Chinese)[阮航宇等 2000 物理学报 **49** 586]

[9] Xu W C *et al* 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 734 (in Chinese)[徐文成等 1994 物理学报 **43** 734]

[10] Tian Q and Ma B K 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2125(in Chinese)[田强、马本堃 1999 物理学报 **48** 2125]

[11] Xue Y and Liu Y Z 2004 *Chin. Phys.* **13** 794

[12] Zhu J M and Ma Z Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 798

[13] Liu G T and Fan T Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 805

[14] Lu J 2004 *Chin. Phys.* **13** 811

[15] Ruan H Y and Chen Y X 2003 *J. Phys. Soc. Japan* **72** 1350

[16] Kruglov V I, Peacock A C and Harvey J D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 113902

[17] Pan L Z 1998 *Mathamtical Method and Application of Nonlinear Problem*(Hangzhou: Zhejiang University Press)(in Chinese)[潘梁祖 1998 非线性问题的数学方法及其应用(浙江 浙江大学出版社)] p32

Solution of the nonlinear Schrödinger equation using the generalized Lie group reduction method *

Ruan Hang-Yu† Li Hui-Jun

(*Department of Physics, Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*)

(Received 29 April 2004; revised manuscript received 25 June 2004)

Abstract

In this paper, by using the technique of generalized Lie group reduction, the exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation with distributed dispersion, nonlinearity, and gain (or loss) are obtained. And, the potential application of the general solitary wave solutions and the chirped solitary wave solutions in optical fibers communication and optical fibers amplifiers have also been studied thoroughly. This will provide the possibility in making new optical fibers amplifiers.

Keywords: Lie group reduction, nonlinear Schrodinger equation, optical fiber communication

PACC: 0230, 0340

* Project supported by the State Key Laboratory of Oil/Gas Reservoir Geology and Exploitation, Southwestern Petroleum Institute, China (Grant No. PLN0402).

† Corresponding author. E-mail: Hyruan@mail.nbip.net

万方数据

用推广的李群约化法求解非线性薛定谔方程

作者：　　　　阮航宇，　李慧军，　RUAN Hang-Yu，　Li Hui-Jun
作者单位：　　宁波大学物理系,宁波,315211
刊名：　　　　物理学报 ISTIC SCI PKU
英文刊名：　　ACTA PHYSICA SINICA
年，卷(期)：　2005,54(3)
被引用次数：　4次

参考文献(17条)

1. 潘梁祖 非线性问题的数学方法及其应用 1998

2. 徐文成 查看详情 1994

3. 阮航宇 查看详情 2000

4. 刘适达 非线性波动方程的Jacobi椭圆函数包络周期解[期刊论文]-物理学报 2002(4)

5. Grimshaw R 查看详情 1979

6. Gamier J;Abdullaev F K 查看详情 2000

7. Gao Y T;Tian B 查看详情 2000

8. Clarkson P A 查看详情 1988

9. Joshi N 查看详情[外文期刊] 1987

10. Kruglov V I;Peacock A C;Harvey J D 查看详情[外文期刊] 2003

11. Ruan H Y;Chen Y X 查看详情 2003

12. Lu J 查看详情[期刊论文]-中国物理（英文版） 2004

13. Liu G T;Fan TY 查看详情[外文期刊] 2004

14. Zhu J M;Ma Z Y 查看详情[期刊论文]-中国物理（英文版） 2004

15. Xue Y;Liu Y Z 查看详情[期刊论文]-中国物理（英文版） 2004

16. 田强;马本堃 用非线性薛定谔方程讨论超晶格中畴的运动[期刊论文]-物理学报 1999(11)

17. Hasegawa A;Tappart F D 查看详情 1973

引证文献(4条)

1. 张弩.宗智.于馨 局部微分求积法的深水包络孤立波数值模拟[期刊论文]-海洋工程 2011(1)

2. 孙璐.田立新 广义色散Camassa-Holm模型的奇异孤子[期刊论文]-物理学报 2007(7)

3. 王延申.严学文 非线性薛定谔模型边界场算子的形式因子[期刊论文]-物理学报 2006(8)

4. 蒲利春.林宗兵.张雪峰.王本菊.姜毅.严天艳 非线性Schr(o)dinger方程组的精确解组[期刊论文]-物理学报 2005(10)

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wlxb200503002.aspx